Υποδείξεις Τεστ 4, Απειροστικος Λογισμός 2

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

(i) Από τον ορισμό των άνω και κάτω αθροισμάτων και επειδή η διαμέριση είναι ομοιόμορφη, συνάγουμε ότι

$$L(f,P) = \sum_{n=1}^{4} m_k = 7, \quad U(f,P) = \sum_{n=1}^{4} M_k = 15$$

όπου $m_k = \inf f \restriction_{[k-1,k]}$ και $M_k = \sup f \restriction_{[k-1,k]}, \ k = 1,2,3,4.$

Εφόσον η P είναι εκλέπτυνση της Q συνάγουμε ότι

$$L(f,Q) \le L(f,P) \le U(f,P) \le U(f,Q).$$

(ii) Η συνάρτηση f είναι φραγμένη και συνεχής στο $[0,4]$ εκτός από τα σημεία $1,2,3$. Οπότε, η f είναι ολοκληρώσιμη και το ολοκήρωμα αυτής με έναν απλό υπολογισμό (μέσω του 2ου Θ.Θ.Α.Λ) από τον τύπο της f, είναι

$$\int_0^4 f(x)\ dx = \sum_{k=1}^{4} \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx = \cdots = 4$$

Θέμα 2

(i) $a_n = \int_0^\pi \sin(nx)\ dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{n}(1-(-1)^n), \ n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$0 \le |a_n| \le \frac{2}{n}$$

και για $n \to \infty$ έχουμε ότι $a_n \to 0$. Οπότε σωστή απάντηση είναι μόνο το (b).

(ii) Αφού f συνεχής στο $[0,1]$ έπεται ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} - 1, \ x \in [0,1]$ είναι συνεχής. Επίσης, $f(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [0,1]$ και αυτό φανερά δίνει ότι $g(x) \ge 0$, για όλα τα $x \in [0,1]$. Οπότε, η $g(x) = 0, \ x \in [0,1] \Rightarrow f(x) = 0, \ x \in [0,1]$. Αρα, οι σωστές απαντήσεις είναι τα (a) και (d).

Θέμα 3

(i) Το πεδίο ορισμού της F είναι κοινό με αυτό της $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ και επίσης $2, \ln x$ πρέπει να ανήκουν σε αυτό. Έτσι, $D_F = (e, +\infty)$. Σε αυτό το σύνολο προφανώς η f είναι συνεχής. Άρα, από το 1ο Θ.Θ.Α.Λ η F είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$F'(x) = f(\ln x)(\ln x)' = \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x - 1}}, \ x > e.$$

(ii) **Για το πρώτο:** Για κάθε $x \neq 0, 1, -2$, έχουμε

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} = -\frac{3}{2}\frac{1}{x} + \frac{5}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+2}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\, dx &= -\frac{3}{2}\int \frac{1}{x}\, dx + \frac{5}{3}\int \frac{1}{x-1}\, dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+2}\, dx \\ &= -\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+2| + c,\ c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(σε ένα διάστημα Δ από τα εξής: $(-\infty,-2), (-2,0), (0,1), (1,+\infty)$)

Για το δεύτερο: Αφού αριθμητής και παρονομαστής έχουν ίδιο βαθμό εκτελούμε διαίρεση των πολυωνύμων. Οπότε, γίνεται

$$3x+2 = \frac{3}{2}(2x-1) + \frac{7}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{3x+2}{2x-1} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\frac{1}{2x-1}.$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{3x+2}{2x-1} = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\ln|2x-1| + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

(είτε στο διάστημα $(-\infty, \frac{1}{2})$ είτε στο διάστημα $(\frac{1}{2}, +\infty)$).

Για το τρίτο: Κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες και επομένως έχουμε

$$\int_1^e [(x^2+x)' \ln x]\, dx = [(x^2+x)\ln x]_1^e - \int_1^e (x^2+x)\frac{1}{x}\, dx = \cdots = \frac{1}{2}(e^2+3).$$

Για το τέταρτο: Θέτουμε $u = \sin x + 3$. Οπότε, $du = \cos x dx$ και αν $x = 0$ τότε $u = 3$ ενώ αν $x = \frac{\pi}{2}$ τότε $u = 4$. Συνεπώς το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 3}} = \int_3^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2[\sqrt{u}]_3^4 = 2(2-\sqrt{3}).$$